TEMA 3. Sistemas de ecuaciones lineales
Problemas Resueltos

Clasificación y resolución de sistemas por métodos elementales

1. Resuelve utilizando el método de de reducción de Gauss–Jordan, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

Solución:
Se transforma el sistema como se irá indicando.

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ 3y+6z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ -6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$

Observación: Para cerciorarse de que la solución es correcta es conveniente su comprobación, sustituyendo los valores hallados en las ecuaciones iniciales, y viendo que se cumplen.

b) $\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y+3z=-4 \\ 2y-2z=6 \\ 3y-4z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y+3z=-4 \\ 2y-2z=6 \\ -y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}.$

2. Resuelve utilizando el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x=2 \\ 2x=2 \end{cases}$ $\to$ (Dos ecuaciones repetidas). Resulta un sistema compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=5 \\ x=1 \end{cases}$.

Si se hace $z = t$, la solución puede escribirse como sigue: $\begin{cases} x=1 \\ y=5-t \\ z=t \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x=2 \\ 2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x=2 \\ 0=-1 \end{cases}$ $\to$ (Una ecuación absurda). El sistema es incompatible.

3. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

<u>Solución</u>:
Se transforma el sistema como se irá indicando.

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=4 \\ -2x+y+mz=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3+2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ 3y+(m+2)z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ (m-10)z=0 \end{cases}.$

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv (m-10)z=0$, puede deducirse:

- Si $m = 10$, queda $E3 \equiv 0 \cdot z = 0$ → Esta ecuación se cumple para cualquier valor de *z*.

El sistema resultante es compatible indeterminado. Para hallar su solución puede hacerse $z = t$ y llevar ese valor a las demás ecuaciones.
Resulta:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+t=2 \\ -y-4t=-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=2-4t \\ z=t \end{cases}.$$

- Si $m \neq 10$, de $E3 \equiv (m-10)z=0 \Rightarrow z=0$ → Observa que, despejando, $z=\dfrac{0}{m-10}=0$.

El sistema resultante es compatible determinado. Para hallar su solución se sustituye $z = 0$ en las demás ecuaciones, resultando:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-4z=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+0=2 \\ -y-0=-2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

b) $\begin{cases} x-y+2z=m \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y-z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=m \\ 3y-3z=2-2m \\ 3y-3z=6-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=m \\ 3y-3z=2-2m \\ 0=4+m \end{cases}.$

La tercera ecuación: $E3 \equiv 0 = 4+m$, sólo tiene sentido si $m = -4$, resultando $0 = 0$. Se pierde una ecuación: el sistema será compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 3y-3z=10 \\ m=-4 \end{cases}$.

Su solución puede darse en función de alguna de las incógnitas. Así, si se hace $z = t$, el sistema queda $\begin{cases} x-y+2t=-4 \\ 3y-3t=10 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4+y-2t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2/3-t \\ y=10/3+t \\ z=t \end{cases}.$

Como se ha dicho, para $m \neq -4$, el sistema será incompatible.

4. Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro *m*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ 2x+my+4z=3 \end{cases}$

Solución:

Se transforma el sistema como se irá indicando.

a) $\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ 3x+my+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ my+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ (m-1)y=-2 \end{cases}$.

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv (m-1)y=-2$, puede deducirse:

- Si $m = 1$, queda $E3 \equiv 0 \cdot y=-2$ → Esta ecuación es absurda. El sistema resultante es incompatible.
- Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Observa que de $E3 \equiv (m-1)y=-2$, despejando $\Rightarrow y=\dfrac{-2}{m-1}$.

El valor de las demás incógnitas se halla sustituyendo:

$$\begin{cases} x \quad +z=1 \\ y+z=2 \\ y=-2/(m-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \to x=1-z \to x=1-\dfrac{2m}{m-1}=\dfrac{-m-1}{m-1} \\ z=2-y \to z=2+\dfrac{2}{m-1}=\dfrac{2m}{m-1} \\ y=-\dfrac{2}{m-1} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ 2x+my+4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ my=1 \end{cases}$.

A partir de la tercera ecuación: $E3 \equiv my=1$, puede deducirse:

- Si $m = 0$, queda $E3 \equiv 0 \cdot y=1$ → La ecuación es absurda. El sistema resultante es incompatible.
- Si $m \neq 0$, el sistema es compatible determinado. Observa que de $E3 \equiv my=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{m}$.

El valor de las demás incógnitas se halla sustituyendo:

$$\begin{cases} x \quad +2z=1 \\ y+z=2 \\ my=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=1 \to x=1-2z \to x=1-\dfrac{4m-2}{m}=\dfrac{-3m+2}{m} \\ z=2-y \to z=2-\dfrac{1}{m}=\dfrac{2m-1}{m} \\ y=\dfrac{1}{m} \end{cases}$$

5. Aplicando la regla de Cramer halla la solución general, en función del parámetro *m*, del sistema $\begin{cases} x \quad + z = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + my + 4z = 3 \end{cases}$.

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & m & 4 \end{pmatrix}$. Su determinante vale $|A| = 1 - m$.

Como para poder aplicar la regla de Cramer hay que exigir que $|A| = 1 - m \neq 0$, *m* no puede tomar el valor 1. Con esto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & m & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+m}{1-m}\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{1-m}\ ;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2m}{1-m}.$$

Puede observarse que esta soluciones carecen de sentido cuando *m* = 1. Esto significa que para *m* = 1 el sistema es incompatible. (Compara este método y resultado con lo hecho en el problema anterior).

6. Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas. Cuando exista, da su solución.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Solución:
Son sistemas de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Para estudiar su compatibilidad basta con aplicar transformaciones de Gauss. El sistema será compatible cuando aparezca una ecuación repetida; en caso contrario, será incompatible.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \\ 3x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \to y = 3 \\ x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$. Compatible.

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \to y = 3 \\ x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$. Incompatible.

De otra manera. El sistema tendrá solución cuando la solución obtenida a partir de dos de las ecuaciones valga en la otra.

a) Se toman *E*1 y *E*2. La solución del sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ es *x* = 2 e *y* = 3.

¿Esos valores verifican la tercera ecuación: $E3 \equiv 2x - y = 1$?
Sí, pues 2 · 2 – 3 = 1.
En consecuencia, el sistema es compatible y su solución es *x* = 2 e *y* = 3.
Observación: La solución es la misma si se toman las ecuaciones *E*1 y *E*3 o *E*2 y *E*3.

b) Se toman $E1$ y $E2$. La solución del sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ es $x = 2$ e $y = 3$.

¿Esos valores verifican la tercera ecuación: $E3 \equiv 2x+y=1$?

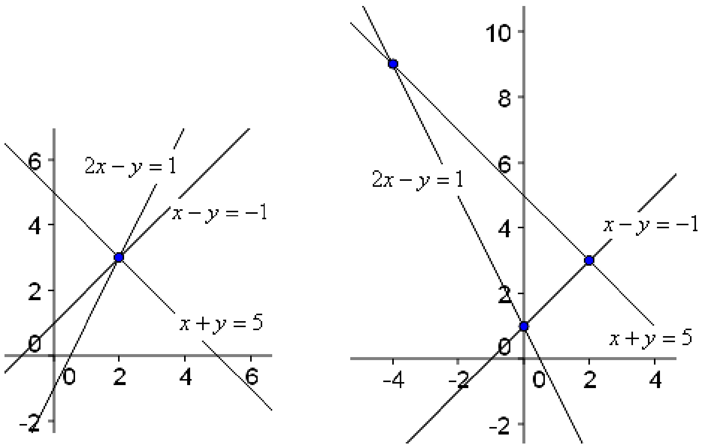
No, pues $2 \cdot 2 + 3 = 7 \neq 1$.

En consecuencia, el sistema es incompatible: no tiene solución.

Observaciones:

1) La solución obtenida a partir de las ecuaciones $E1$ y $E3$, $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ es $x = -4$ e $y = 9$.

2) El lector sabrá que las ecuaciones del tipo $ax+by=c$ se representan como rectas en el plano. Si las tres rectas se cortan en el mismo punto, el sistema asociado es compatible. Si esas tres rectas no tienen ningún punto en común significa que el sistema asociado es incompatible. En la siguiente figura se representan las rectas asociadas a ambos sistemas.



7. Para qué valor de m tendrá solución el sistema:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ mx-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=m \end{cases}$

Solución:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ mx-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3+E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=5 \\ 2x=4 \\ (m+1)x=6 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Como $x = 2$ debe cumplir las tres ecuaciones, sustituyendo en $E3$ se tendrá:

$(m+1)\cdot 2=6 \Rightarrow 2m+2=6 \Rightarrow m=2$.

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 2x+y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=5 \\ 2x=4 \\ x=m-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x=2 \\ x=m-5 \end{cases}$. Será compatible cuando $2 = m - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 7$.

Sistemas con un parámetro. Aplicación del teorema de Rouché

8. Estudia, en función del valor de *m*, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+my+3z=7 \end{cases}$.

Resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones, y da un par de esas soluciones.
Solución:

Sean las matrices de coeficientes y ampliada: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 4 - m \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } m = 4;\ |A| \neq 0 \text{ cuando } m \neq 4.$$

Con esto:

- Si $m \neq 4 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $m = 4$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right) = M$. Como $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Como $C4 = C2 + C3$, el rango de M también es 2: r(M) = 2.
Luego si $m = 4$, r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3-z \\ x+3y=5-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+2y=3-z \\ y=2-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-z-2y \\ y=2-z \end{cases}$$

Haciendo $z = t$, se obtiene la solución $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$.

Para cada valor de t se obtiene una solución distinta. Por ejemplo, si $t = 0$ se obtiene $x = -1$, $y = 2$, $z = 0$; si $t = 1$, la solución es $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

9. Resuelve el sistema $\begin{cases} kx+y+(k+1)z=0 \\ \quad ky+(k+1)z=0 \\ x \qquad\qquad +2z=1 \end{cases}$ para los valores de *k* que lo hagan compatible.

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & k & k+1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = M \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2+k+1-k^2-k = k^2+1.$$

Como $|A| \neq 0$ para todo k, r(A) = 3 = r(M) $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado para todo valor de k.

Su solución, aplicando la regla de Cramer, es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1-k^2}{k^2+1}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k^2-k}{k^2+1}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k^2}{k^2+1}.$$

10. Discute, según los valores del parámetro *k*, el sistema $\begin{cases} kx \quad +2z = 0 \\ \quad ky - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

Resuélvelo para el valor de $k = 2$.

<u>Solución</u>:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k(k+3) - 2k = k^2 + k = k(k+1) \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } k = 0 \text{ o } k = -1$$

Por tanto:

- Si $k \neq 0, -1$, el r(A) = 3 y el sistema será compatible determinado.
- Si $k = 0$, se tiene:

$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$, siendo r($A$) = 2 = r($M$), pues $C1$, $C2$ y $C4$ son proporcionales.

El sistema será compatible indeterminado.

- Si $k = -1$, se tiene:

$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$, con r($A$) = 2 y r($M$) = 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$.

Luego, el sistema será incompatible.

Para $k = 2$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x \quad +2z = 0 \\ \quad 2y - z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad 2y - z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow_{E3-E1} \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad 2y - z = 2 \\ 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \to x = -4/3 \\ z = 2y - 2 \to z = 4/3. \\ y = 5/3 \end{cases}$$

11. a) Discute en función de los valores de a el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+a)y - az = 2a \\ x + ay + (1+a)z = 1 \end{cases}$.

b) Si es el posible, resuélvelo cuando a = –1 y cuando a = 1.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+a & -a & 2a \\ 1 & a & 1+a & 1 \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-1 & -a+1 \\ 0 & a-2 & a+2 \end{vmatrix} = (a-1)(a+2) - (-a+1)(a-2) = 2a(a-1).$$

Por tanto: $|A| = 0$ si a = 0 o a = 1 ⇒ r(A) = 2; $|A| \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ ⇒ r(A) = 3.

En consecuencia:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, r(A) 3 = r(M) → Sistema compatible determinado.
- Si a = 0, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$. Es evidente que r($A$) = 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por otra parte, como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$ ⇒ el rango de M es 3.

En este caso, el sistema será incompatible.

- Si a = 1, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = M$. Como $F1$ = $F2$ ⇒ r(A) = r(M) = 2.

En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = –1, el sistema es compatible determinado. Su solución puede hallarse por sustitución.

Si a = –1, queda: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + z = -2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \to x + 2(x-1) - (-2-x) = 2 \\ z = -2 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ z = -2 - x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -5/2 \end{cases}.$$

Para a = 1, el sistema es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 + z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} y = 1 + 3z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}.$$

Si se hace $z = t$, su solución es $\begin{cases} x = -5t \\ y = 1+3t \\ z = t \end{cases}$.

12. Clasifica según los valores de p el sistema $\begin{cases} (1-p)x = 1-p^2 \\ y = 3 \\ x+y+pz = 3 \end{cases}$. Resuélvelo cuando sea posible.

<u>Solución</u>:

Las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-p & 0 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & p & 3 \end{array}\right) = M$.

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = p(1-p)$. Se anula si $p = 0$ o $p = 1$.

Por tanto:

- Si $p \neq 0$ y $1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado. Su solución es:

$$\begin{cases} (1-p)x = 1-p^2 \\ y = 3 \\ x+y+pz = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-p^2}{1-p} = 1+p \\ y = 3 \\ pz = 3-x-y \to pz = 3+1+p-3 \Rightarrow z = \dfrac{-1-p}{p} \end{cases}$$

- Si $p = 1 \Rightarrow$ Las matrices A y M son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = M$, ambas con rango 2; luego el sistema es compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} 0x = 0 \\ y = 3 \\ x+y+z = 3 \end{cases}$. Como x puede tomar cualquier valor, $x = t$, su solución general es $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$.

- Si $p = 0 \Rightarrow$ Las matrices A y M son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = M$, siendo r($A$) = 2. Puesto que el menor $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a –1, r(M) = 3, y el sistema es incompatible.

13. Estudia la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ kx+(k+3)y+3z=3 \end{cases}$, según los valores del parámetro *k*.
Si es posible, resuélvelo para *k* = –3.
<u>Solución</u>:
Se trata de un sistema con menos ecuaciones que incógnitas; por tanto, puede ser compatible indeterminado, si r(*A*) = r(*M*), o incompatible, cuando r(*A*) = 1 y r(*M*) = 2.

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ k & k+3 & 3 & 3 \end{array}\right)=M$

Los menores $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & k+3 \end{vmatrix}=3-k$ y $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix}=3-k$ valen 0 cuando *k* = 3; luego, r(*A*) = 2 cuando $k \neq 3$ y r(A) = 1 si *k* = 3.

Por otra parte, el rango de *M* siempre es 2, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6\neq 0$.

En consecuencia:
- Si *k* = 3, r(*A*) = 1, r(*M*) = 2 ⇒ el sistema será incompatible.
- Si $k \neq 3$, r(*A*) = r(*M*) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

Para *k* = –3, el sistema es:

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -3x+3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3-x-z \to 2y=2-2x \\ z=1+x \end{cases} \to \text{(si se hace } x=t) \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}.$$

14. (Propuesto en Selectividad 1999, Madrid)
Estudia el siguiente sistema lineal, según los diferentes valores del parámetro real *a*. En los casos en que sea compatible, resuélvelo.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>:

Las marices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 & a \\ -1 & -1 & 2 & a \end{array}\right)=M$

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$. Luego, r(*A*) = 2.

El menor $|M_1|=\begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix}=9a \Rightarrow |M_1|=0$ si *a* = 0; $|M_1|\neq 0$ si $a \neq 0$.

Por tanto, r(*M*) = 2 si *a* = 0; y r(*M*) = 3, si $a \neq 0$.
Luego:
- Si *a* = 0, r(*A*) = 2 = r(*M*). El sistema es compatible indeterminado.
- Si $a \neq 0$, r(*M*) = 3 y r(*A*) = 2:. El sistema será incompatible.

Para a = 0, el sistema dado es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-z=y \\ x+z=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-z=y \\ 3x=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}.$$

15. (Propuesto en Selectividad 2011, UNED)

Resuelve, dependiendo del valor de λ, el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x+2y+3z=0 \\ x-\lambda y-z=0 \\ x-y-z=\lambda \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{array}\right)=M$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \overset{C1+C3}{=} \begin{vmatrix} 3\lambda+3 & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3\lambda+3)(\lambda-1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow |A| = 0$ si $\lambda = -1$ o $\lambda = 1$; $|A| \neq 0$ si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1$.

Por tanto:

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M); el sistema será compatible determinado.

La solución general, para $\lambda \neq \pm 1$, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3\lambda^2}{(3\lambda+3)(\lambda-1)}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-\lambda(-3\lambda-3)}{(3\lambda+3)(\lambda-1)}=\frac{\lambda}{(\lambda-1)};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda(-3\lambda^2-2)}{(3\lambda+3)(\lambda-1)}.$$

- Si $\lambda = -1$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)=M \rightarrow$ r(A) = 2.

Como el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=5\neq 0 \Rightarrow$ r(M) = 3. En este caso, el sistema es incompatible.

- Si λ = 1, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=M$. Como $|M_2|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$, el sistema vuelve a ser incompatible.

16. (Propuesto en Selectividad 1999, Andalucía)

a) Sabiendo que los vectores $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, prueba que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$ es compatible determinado si, y sólo sí, se verifica que: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$.

b) Determina para qué valor, o valores, del parámetro *a* tiene solución única el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - 3y = a \\ 5x + ay = -13 \end{cases}.$$

Halla la solución para cada valor de *a* encontrado.

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$.

Como $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ son linealmente independientes $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Para que el sistema tenga solución, el rango de la matriz ampliada, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} = M$, también debe ser 2. Pero esto exige que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$.

b) En este caso, los vectores $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, pues $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Por tanto, el sistema tendrá solución cuando $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & a \\ 5 & a & -13 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$2a^2 + 9a + 9 = 0 \Rightarrow a = -3$ o $a = -3/2$.

- Para $a = -3$, el sistema queda: $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$. Su solución es: $x = -5$; $y = -4$.
- Para $a = -3/2$, el sistema queda: $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - 3y = -3/2 \end{cases}$. Su solución es: $x = -7/2$; $y = -3$.

17. (Propuesto en Selectividad 2001, La Rioja)
Estudia, según los valores de *m*, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+my+3z=3 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases}$$

Solución:
Es un sistema con 4 ecuaciones y 3 incógnitas. Necesariamente sobra una ecuación, al menos. Como siempre, tendrá solución cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la matriz ampliada.

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)=M$

El rango de *A* es 3, pues el menor $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=17\neq 0$.

Para que el rango de *M* también sea 3 es necesario que su determinante (4 × 4) sea 0:

$$|M|=\begin{vmatrix} m & 3 & 3 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-12m+45+13=-12m+58 \Rightarrow |M|=0 \text{ si } m=\frac{29}{6}.$$

Por tanto:

- Si $m\neq\frac{29}{6}$, r(*A*) = 3 y r(*M*) = 4. El sistema será incompatible.
- Si $m=\frac{29}{6}$, r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema es compatible determinado.

Para $m=\frac{29}{6}$ el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases}$ (Se ha suprimido *E*2).

Aplicando el método de reducción de Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y-6z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y-6z=0 \\ 17z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 & \to x=1-2y-3z=-13/17 \\ y-6z=0 & \to y=6z=12/17 \\ z=2/17 \end{cases}$$

Luego, para $m=\frac{29}{6}$, la solución es: $x=\frac{-13}{17}$; $y=\frac{12}{17}$; $z=\frac{2}{17}$.

Sistemas con dos parámetros

18. Clasifica, según los valores de los parámetros *a* y *b*, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+(a+1)y+b\,z=a \\ a\,y+b\,z=a+b \\ x+2y+z=b \end{cases}$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & b & a \\ 0 & a & b & a+b \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)=M \rightarrow \text{(Por Gauss)} \Leftrightarrow A=\begin{array}{c} \\ F2-F1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & b & a \\ -1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)=M$$

Determinante de *A*: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a-b \Rightarrow |A|=0$ si $a=b$; $|A|\neq 0$ si $a\neq b$.

Por tanto:

- Si $a\neq b$ y $a\neq 1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*); el sistema será compatible determinado.
- Si $a=b$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & a \end{array}\right)=M$. El rango de *A* es 2, $|A_1|=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Para determinar el rango de *M* se toma el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2a(a-1)$. Por tanto, el rango de *M* es 3 si $a\neq 0$ y 1; y será 2 cuando $a=0$ o 1.

Luego:

→ Si $a=b=0$ o $1 \Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 2. Sistema compatible indeterminado.

→ Si $a=b\neq 0$ y $1 \Rightarrow$ r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3. Es sistema será incompatible.

19. (Propuesto en Selectividad 1998, Cantabria)

Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de *a* y *b*: $\begin{cases} ax+y+bz=1 \\ x+ay+bz=1 \\ x+y+abz=b \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & ab & b \end{array}\right)=M$

Determinante de *A*: $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & ab \end{vmatrix}=b(a-1)^2(a+2) \Rightarrow |A|=0$ si $b=0$, $a=1$ o $a=-2$.

Por tanto:

- Si $b\neq 0$ y $a\neq 0$ y $-2 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*), y el sistema será compatible determinado.

- Si b = 0, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$.

Puede tomarse $|M_1| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2a \Rightarrow |M_1| = 0$ si a = 1; $|M_1| \neq 0$ si $a \neq 1 \to$ r(M) = 3.

Luego, hay que considerar los casos: b = 0 y a = 1; b = 0 y $a \neq 1$.

Para b = 0 y a = 1, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$, siendo r(A) = 1 y r(M) = 2. El sistema es incompatible.

Para b = 0 y $a \neq 1$, se tiene r(A) = 2 y r(M) = 3. El sistema también es incompatible.

- Si a = 1, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b & b \end{array}\right) = M \Rightarrow$ r(A) = 1.

Tomando $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 \Rightarrow |M_2| = 0$ si b = 1; $|M_2| \neq 0$ si $b \neq 1 \to$ r(M) = 2.

Luego, si a = 1 y $b \neq 1$, r(A) = 1 y r(M) = 2: sistema incompatible.

Y, si a = 1 y b = 1, queda $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$, con r(A) = 1 = r(M). Sistema compatible indeterminado, con dos grados de indeterminación.

- Si a = –2, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & b & 1 \\ 1 & -2 & b & 1 \\ 1 & 1 & -2b & b \end{array}\right) = M \Rightarrow$ r(A) = 2.

Pueden tomarse: $|M_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 6 + 3b$ y $|M_4| = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & b \end{vmatrix} = b(3b + 6)$.

Ambos menores se anulan si b = –2, siendo r(M) = 2; en cualquier otro caso, $b \neq$ –2, r(M) = 3.
Luego, si a = –2 y b = –2, r(A) = 2 y r(M) = 2: el sistema es compatible indeterminado.
Y, si a = –2 y $b \neq$ –2, r(A) = 2 y r(M) = 3: el sistema es incompatible.

Resumiendo, queda:
- Si $b \neq 0$ y $a \neq 0$ y –2, r(A) = 3 = r(M): sistema será compatible determinado.
- Si a = 1 y b = 1, (A) = 1 = r(M): sistema compatible indeterminado, con dos grados de indeterminación.
- Si a = –2 y b = –2, r(A) = 2 y r(M) = 2: el sistema es compatible indeterminado.

En los demás casos, el sistema es incompatible.

20. (Propuesto en Selectividad 1998, La Rioja)
Discute, en función de los valores de *a* y *b*, y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+y+bz=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)=M$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=(a-b)(a-1) \Rightarrow |A|=0$ si $a=b$ o $a=1$; $|A|\neq 0$ si $a\neq b$ y $a\neq 1$.

Por tanto:

- Si $a\neq b$ y $a\neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M); el sistema será compatible determinado.
- Si $a = 1$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$. El rango de ambas matrices será el mismo, pues

la columna de términos independientes se repite. Por tanto, el sistema será compatible indeterminado, sin importar el valor de *b*. (Hay tres columnas iguales; y si $b = 1$, la cuatro serían iguales).
Luego:
$\rightarrow$ Si $a = 1$ y $b\neq 1$, r(A) = r(M) = 2. Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
$\rightarrow$ Si $a = 1$ y $b = 1$, r(A) = r(M) = 1. Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.

- Si $a = b$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)=M \Leftrightarrow A=\begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array}\right)=M$.

El rango de *A* es 1 si $a = 1$; y es 2 en cualquier otro caso.

Para determinar el rango de *M* se toma el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix}=-(a-1)^2$. Por tanto, el rango de *M* es 3 si $a\neq 1$; y será 1 cuando $a = 1$.
Luego:
$\rightarrow$ Si $a = b = 1$ (caso ya estudiado) $\Rightarrow$ r(A) = r(M) = 1. Sistema compatible indeterminado.
$\rightarrow$ Si $a = b$ y ambos distintos de 1 $\Rightarrow$ r(A) = 2 y r(M) = 3. Es sistema será incompatible.

Soluciones en los distintos supuestos.

- Si $a = 1$ y $b\neq 1$, r(A) = r(M) = 2, el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+bz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1-y \\ x+bz=1-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+z=1-y \\ (b-1)z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=\quad t \\ z=0 \end{cases}.$$

- Si a = 1 y b = 1, r(A) = r(M) = 1, el sistema es: $\{x+y+z=1$, cuya solución puede darse en la forma: $\begin{cases} x=1-t-h \\ y=\quad t \\ z=\qquad h \end{cases}$. (Las indeterminadas son las incógnitas y y z).

- Si $a \neq b$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M), y el sistema será compatible determinado.

Su solución, en función de a y b, aplicando la regla de Cramer, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^3-2a-ab+b+1}{(a-b)(a-1)};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a^2+2a-1}{(a-b)(a-1)}=\frac{-(a-1)^2}{(a-b)(a-1)}=\frac{1-a}{(a-b)};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a^2+2a-1}{(a-b)(a-1)}=\frac{1-a}{a-b}.$$

Observación: Estudiando los términos de las fracciones que dan las soluciones podría hacerse la discusión de este sistema.

21. Halla los valores de a y b para que el siguiente sistema sea compatible: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+3y=b \\ x+2y=a \\ x+4y=2a \end{cases}$

Solución:

El rango de la matriz de coeficientes es 2, independiente de los valores que tomen a y b.

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & 2a \end{array}\right)=M \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ F2-F1 \\ F3-F1 \\ F4-F1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & b-1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 3 & 2a-1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ F2-2F3 \\ \\ F4-3F3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a+1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & -a+2 \end{array}\right)$$

El sistema será compatible cuando el rango de la matriz ampliada sea 2: cuando no sea 3.

Para ello, los menores $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a+1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$ y $|M_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$ deben ser nulos.

Por tanto: $\begin{cases} |M_1|=0 \to -b+2a-1=0 \\ |M_2|=0 \to a-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=2$ y $b=3$.

Luego, el sistema dado será compatible cuando a = 2 y b = 3; en los demás casos el sistema es incompatible.

Para a = 2 y b = 3, el sistema dado es equivalente a $\begin{cases} x+y=1 \\ x+3y=3 \end{cases}$. Su solución es x = 0, y = 1.

Sistemas homogéneos

22. Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$.

a) Halla sus soluciones.
b) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo homogéneo y tenga solución única.
c) Añade otra ecuación para que el sistema siga siendo compatible indeterminado.
Solución:
a) Por tratarse de un sistema homogéneo es compatible. Como tiene 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones, será indeterminado. Su solución puede hacerse despejando, para ello aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ x+2y=-3z \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y=-z \\ y=-2z \end{cases}$$

Haciendo $z = t$, su solución es: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

b) Debe añadirse una ecuación que no dependa de las dos dadas. Por ejemplo $x+y=0$.

El sistema sería $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$; que por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \neq 0$, solo tiene la solución trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

c) Debe añadirse una ecuación que dependa de las dos dadas.
Por ejemplo $E3 \equiv E2-E1 \to y+2z=0$.

El sistema sería $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$; que por ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1-1=0$, es compatible indeterminado, y equivalente al dado.

23. Discute y resuelve, en función de los valores de k, el sistema $\begin{cases} kx+(1-k)y+(2-k)z=0 \\ x+y+z=0 \\ kx+y+kz=0 \end{cases}$.

Solución:
Es un sistema homogéneo; por tanto, siempre tiene solución. Para que tenga infinitas soluciones, el rango de la matriz de coeficientes, A, debe ser 2 $\Rightarrow$ $|A|=0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = C2-C1 \\ C3-C1 \end{matrix} \begin{vmatrix} k & 1-2k & 2-2k \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 1-k & 0 \end{vmatrix} = -(2-2k)(1-k) = 2(k-1)^2$$

Con esto:

- Si $k \neq 1$, $|A| \neq 0$ $\to$ el sistema será compatible determinado; y su solución: $x = y = z = 0$.

- Si k = 1, la matriz de coeficiente queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2. Por tanto, el sistema

inicial es equivalente a $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. (Debe suprimirse la 2ª o 3ª ecuación; nunca la 1ª).

Su solución es $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$.

24. Discute, según los valores del parámetro k, el sistema: $\begin{cases} (1+k)x-2y+4z=0 \\ x-(1-k)y+z=0 \\ x+ky+z=0 \end{cases}$.

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.
Solución:
Como el sistema es homogéneo siempre será compatible. Si el rango de la matriz de coeficientes es 3, será compatible determinado; si vale menos que 3, compatible indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+k & -2 & 4 \\ 1 & -1+k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ F3-F2 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1+k & -2 & 4 \\ 1 & -1+k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+k-4) = -k+3$$

Por tanto:

- Si $k \neq 3 \Rightarrow$ r(A) = 3, pues $|A| \neq 0$. El sistema será compatible determinado; y su solución: x = 0, y = 0, z = 0.
- Para k = 3, la matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2, pues el menor

$M_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Por tanto, el sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

- Para ese valor de k = 3, el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \to \text{(sobra una ecuación)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-z \\ x+3y=-z \end{cases}.$$

Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ -z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-z}{1} = -z;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0.$$ Si se hace z = t, la solución es: $\begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$.

25. Discute, según los valores del parámetro *a*, el sistema $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x - 3y + az = 0 \\ ax + z = 0 \end{cases}$.

Resuélvelo en los casos en que sea compatible, resolverlo.

Solución:

Es un sistema homogéneo. Siempre es compatible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - 6a = 0 \text{ cuando } a = 1/2; \text{ y } |A| \neq 0 \text{ si } a \neq 1/2.$$

Luego:

- Si $a \neq 1/2$, r(A) = 3. El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1/2$, r(A) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

Soluciones en ambos casos:

Para $a \neq 1/2$, la solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Para $a = 1/2$, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x - 3y + z/2 = 0 \\ x/2 + z = 0 \end{cases} \to$ (sobra una ecuación) $\to$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x - 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ 2x - 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -4z - 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -6y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z/2 \end{cases}.$$

Si se hace $z = -2t$, la solución es: $\begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

26. (Propuesto en Selectividad 1998, Madrid)

Se considera el sistema de ecuaciones en las incógnitas *x*, *y*, *z*, *t*: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2\lambda y - t = 0 \end{cases}$.

a) Encuentra los valores de λ para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2.

b) Resuelve el sistema anterior para λ = 0.

Solución:

a) La matriz asociada al sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{F3-2F1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Para que el rango sea 2 es necesario que el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2\lambda - 4 & -2 \end{vmatrix}$ sea nulo $\Rightarrow$

$\Rightarrow |A_1| = -2 - 2(2\lambda - 4) = 0 \Rightarrow -4\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3/2$.

b) Como hay más incógnitas que ecuaciones, la solución debe darse en función de alguna de ellas. En este caso, si λ = 0, el rango de la matriz de coeficientes será 3, y el sistema inicial:

$$\begin{cases} x+2y+z \quad\quad = 0 \\ \quad\; y+2z+t = 0 \\ 2x+2y \quad -t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z = 0 \\ \quad y+2z = -t \\ 2x+2y \quad = t \end{cases}.$$

Su matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -t \\ 0 & -4 & -2 & t \end{array}\right) \underset{F3+4F2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -t \\ 0 & 0 & 6 & -3t \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z = 0 \\ \quad y+2z = -t \\ \quad\quad 6z = -3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t/2 \\ y = 0 \\ z = t/2 \end{cases}.$$

Problemas con enunciado

27. En un laboratorio se dispone de frascos con distinta capacidad y soluciones salinas de concentraciones diferentes. Frascos de 50 cl (centilitros), con una solución salina al 10%; frascos de 50 cl, con solución salina al 20%; y frascos de 100 cl, con solución salina al 50%. Si se desea obtener 12 litros de solución salina al 30%, ¿cuántos frascos completos de cada tipo hay que emplear? Si hay varias posibilidades, concreta un par de ellas.

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* el número de frascos necesarios de cada una de las soluciones:

x = número de frascos de 50 cl al 10% → Cantidad de sal: 0,10 · 50 · *x* = 5*x*
y = número de frascos de 50 cl al 20% → Cantidad de sal: 0,20 · 50 · *y* = 10*y*
z = número de frascos de 100 cl al 50% → Cantidad de sal: 0,50 · 100 · *z* = 50*z*
Se necesita 12 litros = 1200 cl al 30% → Cantidad de sal: 0,30 · 1200 = 360

Por tanto, debe cumplirse la ecuación: $5x+10y+50z = 360 \Leftrightarrow x+2y+10z = 72$.

La solución general es: $\begin{cases} x = 72-2\lambda-10\mu \\ y = \quad \lambda \\ z = \quad\quad \mu \end{cases}$

Teóricamente hay infinitas ternas que cumplen esta ecuación; no obstante, como las soluciones deben ser enteras y positivas, su número será finito.

Dos de estas soluciones son:

1)Tomando λ = 10 y μ = 2: $\begin{cases} x = 32 \\ y = 10 \\ z = 2 \end{cases}$; 2) Tomando λ = 5 y μ = 6: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 6 \end{cases}$.

28. Con los datos del problema anterior. Si se sabe que se emplearon un total de 22 frascos, ¿es posible determinar cuántos se emplearon de cada tipo? Si es posible, da una de las soluciones.

Solución:

Con esta información se obtiene una segunda ecuación: $x+y+z = 22$.

El sistema resultante es: $\begin{cases} x+2y+10z = 72 \\ x+y+z = 22 \end{cases}$. Equivalente a: $\begin{cases} x+2y = 72-10z \\ x+y = 22-z \end{cases}$

Este sistema sigue siendo indeterminado. Su solución es: $\begin{cases} x = -28 + 8t \\ y = 50 - 9t \\ z = t \end{cases}$.

Como se dijo antes, el número de frascos de cada tipo debe positivo. Por tanto, t debe ser mayor que 3. Supuesto que $t = 4$ se obtiene: $x = 4$, $y = 16$, $z = 4$.
Observación: Puede verse que si $t = 3$, saldría $x = –4$; solución imposible. Lo mismo pasa si $t = 6$, pues saldría $y = –4$. De hecho, con este enunciado, z sólo puede tomar los valores 4 o 5.

29. Con los datos del problema **27**. Si se sabe que se emplearon un total de 17 frascos, y que se utilizaron el doble de frascos de la solución al 20 % que de la solución al 50 %, ¿es posible determinar cuántos frascos se emplearon de cada tipo?
Solución:
Con esta información se obtienen las siguientes ecuaciones:
Relativa a la solución total: $x + 2y + 10z = 72$
Relativa al número de frascos: $x + y + z = 17$.
Relativa a la relación 20%—50%: $y = 2z$

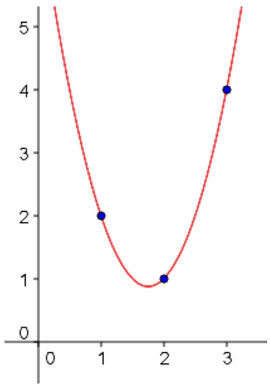
El sistema resultante es: $\begin{cases} x + 2y + 10z = 72 \\ x + y + z = 17 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

Aplicando el método de reducción de Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y + 10z = 72 \\ x + y + z = 17 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - 2E3 \\ E2 - E3 \\ \end{matrix} \begin{cases} x + 14z = 72 \\ x + 3z = 17 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - E2 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 11z = 55 \\ x + 3z = 17 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x = 2 \\ y = 10 \end{cases}.$$

Se emplearon: 2 frascos de la solución al 10 %; 10, de la solución al 20 %; 5, de la solución al 50 %.

30. Encuentra la ecuación de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica pasa por los puntos (1, 2), (2, 1) y (3, 4).
Solución:
Si un punto pertenece a una parábola, se deduce que cumple su ecuación. Por tanto:



Si (1, 2) es de la parábola: $2 = a·1^2 + b·1 + c \Rightarrow a + b + c = 2$
Si (2, 1) es de la parábola: $1 = a·2^2 + b·2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$
Si (3, 4) es de la parábola: $4 = a·3^2 + b·3 + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 4$

Esto es: $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$.

Por Gauss:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + b = -1 \\ 8a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - 2E2 \end{matrix} \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + b = -1 \\ 2a = 4 \end{cases} \begin{matrix} c = 7 \\ \Rightarrow b = -7 \\ a = 2 \end{matrix}$$

La ecuación de la parábola es: $y = 2x^2 - 7x + 7$.

31. La circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, pasa por los puntos (6, 2), (4, 6) y (–3, –1). Halla su centro y su radio.

Solución:

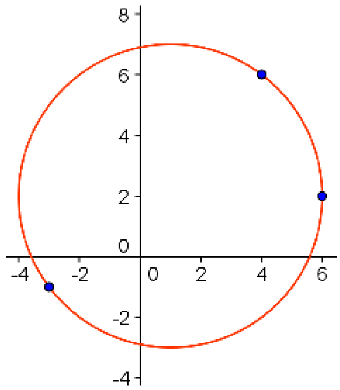
Si (6, 2) es de la circunferencia: $6^2 + 2^2 + a\cdot 6 + b\cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 6a + 2b + c = -40$

Si (4, 6) es de la circunferencia: $4^2 + 6^2 + a\cdot 4 + b\cdot 6 + c = 0 \Rightarrow 4a + 6b + c = -52$

Si (–3, –1) es de la circunferencia:

$$(-3)^2 + (-1)^2 + a\cdot(-3) + b\cdot(-1) + c = 0 \Rightarrow -3a - b + c = -10$$

Esto es: $\begin{cases} 6a + 2b + c = -40 \\ 4a + 6b + c = -52 \\ -3a - b + c = -10 \end{cases}$



Por Gauss $\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 6a + 2b + c = -40 \\ -2a + 4b = -12 \\ -9a - 3b = 30 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 4E3 + 3E2 \end{matrix} \begin{cases} 6a + 2b + c = -40 \\ -2a + 4b = -12 \\ -42a = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -20 \\ b = -4 \\ a = -2 \end{cases}$.

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Para determinar su centro y su radio hay que completar cuadrados:

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

El centro de la circunferencia es el punto (1, 2); su radio vale 5.

32. Se desea preparar una dieta a base de tres alimentos básicos, [1], [2] y [3]. La dieta debe incluir exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades de cada ingrediente por cada paquete de alimentos se indica en la tabla adjunta. ¿Cuántos paquetes de cada alimento deben emplearse para conseguir la dieta requerida?

	Unidades por paquete		
Alimento	[1]	[2]	[3]
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* el número de paquetes necesarios de los alimentos [1], [2] y [3], respectivamente.

Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} 30x + 10y + 20z = 340 \\ 10x + 10y + 20z = 180 \\ 10x + 30y + 20z = 220 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 30x + 10y + 20z = 340 \\ -20x = -160 \\ -20x + 20y = -120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Deben emplearse 8 paquetes del [1], 2 paquetes del [2] y 4 paquetes del [3].

33. Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* los precios de un café, un refresco y un dulce, respectivamente.

Grupo 1: $2x + y + 3z = 8{,}40$; Grupo 2: $4x + y + 5z = 13{,}80$; Grupo 3: $x + 2y + 2z = 7{,}50$

Se obtiene un sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=8{,}40 \\ 4x+y+5z=13{,}80 \\ x+2y+2z=7{,}50 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y+3z=8{,}40 \\ 2x+2z=5{,}40 \\ -3x-4z=-9{,}30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+2E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y+3z=8{,}40 \\ 2x+2z=5{,}40 \\ x=1{,}50 \end{cases}$$

Si x = 1,50 $\Rightarrow$ z = 1,20; y = 1,80.
Un café cuesta 1,50 €; un refresco, 1,80 €; un dulce, 1,20 €.

34. Una persona dispone de 21000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad media de esos activos es de un 5, 6 y 10 %, respectivamente. El inversor quiere invertir en acciones el doble que en bonos, y conseguir una rentabilidad media del 7 %. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos bienes?
Solución:
Sean x, y, z las cantidades a invertir en bonos, fondos y acciones, respectivamente.
Debe cumplirse que:
Total de dinero: $x+y+z=21000$
Rentabilidad prevista y deseada: $0{,}05x+0{,}06y+0{,}10z=0{,}07\cdot 21000$
Inversión en acciones: $z=2x$
Las tres ecuaciones originan un sistema que, resuelto por Gauss, proporciona la cantidad a invertir en cada bien:

$$\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 0{,}05x+0{,}06y+0{,}10z=1470 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=21000 \\ 5x+6y+10z=147000 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-5E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=21000 \\ y+5z=42000 \\ -2y-3z=-42000 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=21000 \\ y+5z=42000 \\ 7z=42000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3000 \\ y=12000 \\ z=6000 \end{cases}.$$

Hay que invertir: 3000 € en bonos; 12000 € en fondos; 6000 € en acciones.

35. (Propuesto en PAU 2016, Asturias)
Considere un número de tres cifras cumpliendo que la suma de su número de decenas y su número de unidades es 5, y si al número original le restamos el número escrito con los dígitos en orden contrario, se obtiene 792.
a) Escriba el sistema de ecuaciones lineales.
b) Determine la matriz del sistema y la matriz ampliada.
c) Obtenga los posibles números en las condiciones dadas.
Solución:
Sea “*XYZ*” el número.
a) De acuerdo con el enunciado se cumple:

$$\begin{cases} Y+Z=5 \\ "XYZ"-"ZYX"=792 \end{cases}$$

Como $XYZ=100X+10Y+Z$ y $ZYX=100Z+10Y+X$ $\Rightarrow$ $XYZ-ZYX=99X-99Z$.
Por tanto:

$$\begin{cases} Y+Z=5 \\ "XYZ"-"ZYX"=792 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y+Z=5 \\ 99X-99Z=792 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y+Z=5 \\ X-Z=8 \end{cases}.$$

b) Matriz de coeficientes del sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

c) Transformando el sistema:

$\begin{cases} Y+Z=5 \\ X-Z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y=5-Z \\ X=8+Z \end{cases}$ → Como las cifras no pueden ser negativas ni mayores de 9, los valores para Z den ser 0 o 1. Por tanto:

Si Z = 0, el número será: 850. Si Z = 1, el número es 941.

36. (Propuesto en PAU 2017, País Vasco)

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80 % y un tercer grupo abona el 50 %. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Solución:

Sean x los pasajeros que pagan el billete entero; y, los que pagan el 80%; z, los que pagan el 50%.

Por el enunciado se deduce que:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 1,2\cdot x+(0,80\cdot 1,2)y+(0,50\cdot 1,2)z=46,56 \\ z=2(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ 1,2x+0,96y+0,6z=46,56 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases}$$

Se transforma el sistema:

$$\begin{matrix} \\ E2-1,2E1 \\ E3-2\cdot E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=60 \\ -0,24y-0,6z=-25,44 \\ -3z=-120 \to z=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+40=60 \\ -0,24y-24=-25,44 \to y=6 \\ z=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=6 \\ z=40 \end{cases}.$$

37. (Propuesto en EvAU 2018, Madrid)

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.

En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno.

Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución:

Cada día en Francia cuesta: 20 € de hotel + 20 € de comida + 8 € de viaje = 48 €.

En Alemania: 25 € + 15 € + 8 € = 48 €.

En Suiza: 30 € + 25 € + 8 € = 63 €.

Si el número de días que cada estudiante pasa en Francia, Alemania y Suiza son x, y, z, respectivamente, se debe cumplir que:

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 48x+48y+63z=765 \\ x=2z \end{cases} \to \text{Sustituyendo y por Gauss} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y+3z=15 \\ 48x+159z=765 \\ x=2z \end{cases} \Rightarrow E2-48E1 \begin{cases} y+3z=15 \\ 15z=45 \\ x=2z \end{cases} \Rightarrow z=3;\ x=6;\ y=6.$$

38. (Propuesto en PAU 2014, País Vasco)
Un comercio ha adquirido una partida de armarios y mesas. Los armarios han costado 649 € cada uno de ellos y las mesas 132 € cada una. El responsable del comercio no recuerda si el precio total ha sido 2716 o 2761 €.
a) ¿Cuánto ha pagado exactamente? Razona la respuesta.
b) ¿Cuántos armarios y mesas ha comprado exactamente?
Solución:
Si el comerciante adquiere x armarios e y mesas, debe cumplirse alguna de las dos ecuaciones siguientes: $649x+132y=2716$; o bien, $649x+132y=2761$.
Es evidente que falta una ecuación, pero se pueden conocer dos cosas:
1) Los valores de x e y deben ser enteros no negativos;
2) Además $x \le 4$, pues con $x = 5$ se supera el precio total.
La solución puede obtenerse probando si para $x = 0, 1, 2, 3$ o 4, existe un valor coherente para el número de mesas y.

Con la primera ecuación $649x+132y=2716$, si se adquieren x armarios:

Armarios, x	Coste de x armarios	Cantidad sobrante	Número posible de mesas compradas	¿Es posible?
0	0	2716	20,57…	No
1	649	2067	15,65…	No
2	1298	1418	10,74…	No
3	1947	769	5,82…	No
4	2596	120	0,90…	No

Por tanto, la cantidad de 2716 € no ha podido ser el precio total.

Con la segunda ecuación $649x+132y=2761$, si se adquieren x armarios:

Armarios, x	Coste de x armarios	Cantidad sobrante	Número posible de mesas compradas	¿Es posible?
0	0	2761	20,91…	No
1	649	2112	16	SÍ
2	1298	1463	9,83…	No
3	1947	814	6,16…	No
4	2596	165	1,25	No

La única solución posible es: "Se ha comprado 1 armario y 16 sillas".
El precio total ha sido de 2761 euros.

→ Otra opción: Observando que 649 y 132 son múltiplos de 11, la cantidad total a pagar también debe serlo. Como 2716 no es múltiplo de 11 y 2761 sí lo es, esta cantidad debe ser la correspondiente al precio total.